**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**CENTRO TECNOLÓGICO**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISCIPLINA EMC 5412 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL**

**TRABALHO 1**

**TRABALHO SOBRE CONDUÇÃO NÃO LINEAR**

**Professor: António Fábio Carvalho da Silva**

**Aluno: Gusttav Bauermann Lang**

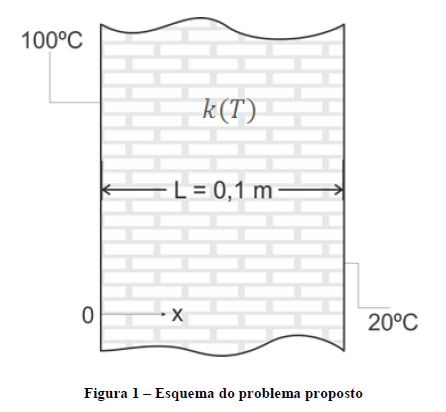
**Matrícula: 13200534**

**Florianópolis, 31 de Março de 2017**

1. Problema Proposto

Considere a parede mostrada na Figura 1. A superfície esquerda é mantida a 100 °C enquanto a direita é mantida a 20 °C. Sabe-se que a espessura L da parede é igual a 100 mm e que sua condutividade térmica varia com a temperatura de acordo com:



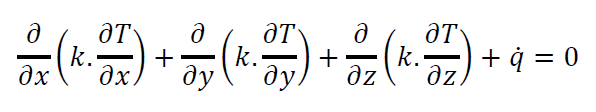


Usando uma malha igualmente espaçada, determine a distribuição de temperatura na parede avaliando as condutividades nas interfaces pela média aritmética e pela média harmônica. Compare os resultados com a solução exata dada por:



1. Desenvolvimento

A distribuição de temperatura em uma parede pode ser determinada através da resolução da equação do calor. Para uma situação em regime permanente, a equação do calor em uma parede plana pode ser descrita pela seguinte equação:



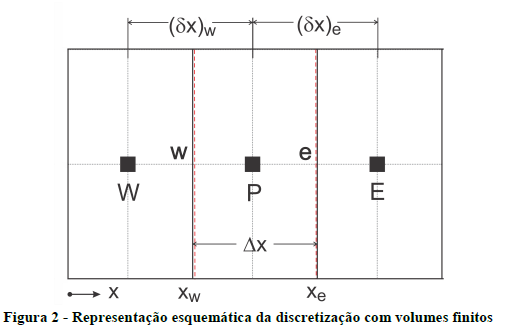
Para um problema unidimensional, a equação da condução se reduz a:



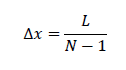
onde k é condutividade térmica do material e S é o termo fonte.

Para auxiliar na resolução deste problema, será usado o método dos volumes finitos para obter uma aproximação para o perfil de temperaturas ao longo da parede.

A solução numérica determinada através do método dos volumes finitos é feito a partir da discretização da parede em volumes de controle, uma representação esquemática desta discretização em volumes finitos pode ser observada na Figura 2.

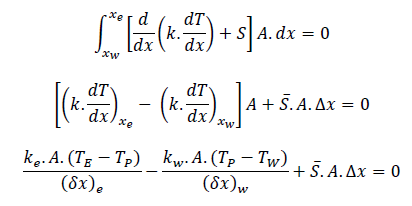


Assim, foram adotados volumes de controle de fronteira centrados na interface com o ambiente externo, de modo que seja possível adotar uma malha igualmente espaçada ao longo da parede. Logo, os volumes de controle de fronteira possuem metade do comprimento dos volumes de controle no interior da parede. Os volumes de controle no interior da parede possuem comprimento determinado através da seguinte equação:



onde L é a espessura da parede, e N é o número de volumes de controle utilizados na discretização da parede.

Considerando que A é área de seção transversal da parede, pode-se realizar a integração da equação do calor pela equação 2 para o volume de controle P, assim:



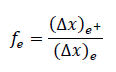
A equação pode ser rearranjada da seguinte maneira:



onde:



Neste problema, a condutividade térmica varia conforme a temperatura. Deste modo, para assegurar a continuidade do método dos volumes finitos, será feito uma avaliação da condutividade térmica através do método da interpolação linear e da resistência equivalente. Estes dois métodos utilizam o seguinte fator de interpolação:

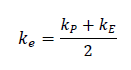


onde é a distância entre os volumes de controle P e E, como pode ser observado na Figura 2. é a distância entre a interface e o volume de controle E. Como será utilizado uma malha igualmente espaçada para discretizar a parede, o fator de interpolação será igual a 0,5.

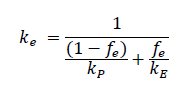
No método da interpolação linear, é feita uma interpolação linear entre os centros dos volumes de controle, assim a condutividade na interface pode ser determinada através da seguinte equação:



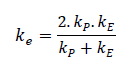
Aplicando o fator de interpolação, a condutividade térmica avaliada pela interpolação linear torna-se a média aritmética, logo resultando na seguinte equação:



Já pelo método da resistência térmica equivalente, a condutividade térmica equivalente é determinada através da seguinte equação:



Aplicando o fator de interpolação, a condutividade térmica avaliada pela resistência térmica equivalente torna-se a média harmônica, sendo descrita pela seguinte equação:



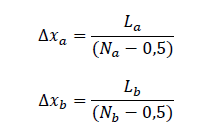
No problema proposto, não há geração interna de calor, de modo que o termo fonte médio é nulo e será considerado que a área de seção transversal da parede possui 1 m².

**Escrever sobre gauss seidel**

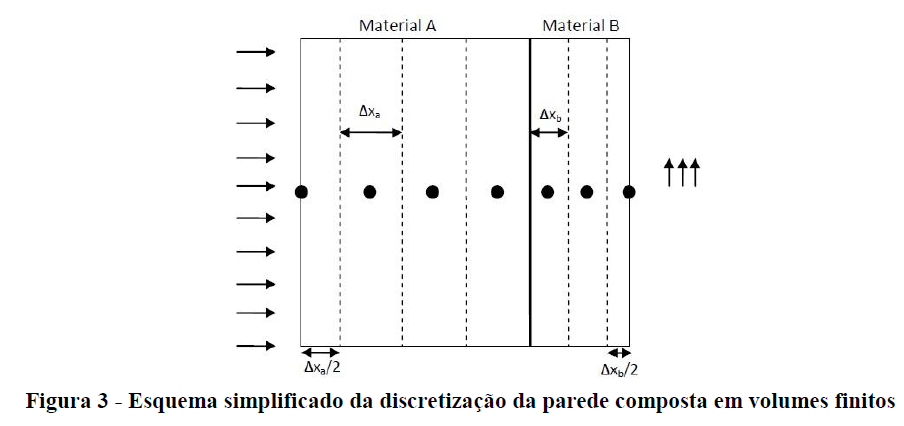
Essa equação será utilizada para definir os volumes finitos internos das paredes constituídas dos dos materiais A e B, com exceção das interfaces das extremidades da parede em contado com o ambiente externo.

Na discretização da parede composta optou-se por posicionar os volumes de controle de fronteira com o ambiente externo centrados na extremidade com o ambiente externo. Estes volumes de controle de fronteira possuem um comprimento equivalente a metade do comprimento do volume de controle utilizado nos outros volumes de cotrole da mesma parede. Uma representação esquemática da discretização da parede composta pode ser observada na Figura 3.

Deste modo, o comprimento dos volumes de controle nas paredes constituídas dos materiais A e B podem ser determinados, respectivamente, através das seguintes equações:



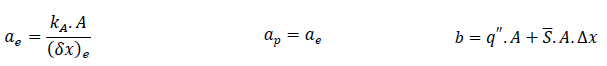
onde e são, respectivamente, o número de volumes de controles utilizados na discretização das paredes constituídas dos materiais A e B.



Como pode-se observar na Figura 3, a extremidade esquerda da parede composta está sob uma condição de fluxo prescrito. Assim, como foi demonstrado em sala de aula, para o primeiro volume de controle a equação do calor se reduz para:



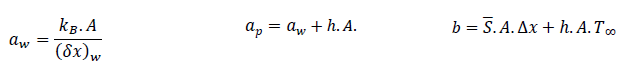
onde:



A extremidade direita da parede composta está exposta à convecção do ambiente externo. Assim, como foi demonstrado em sala de aula, para o último volume de controle a equação do calor se reduz para:



onde:

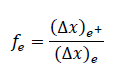


1. Avaliação dos volumes na interface

Para os volumes de controle que estão situados entre a interface entre as paredes constituídas pelos materiais A e B, pode-se usar a equação:



Entretanto deve-se atentar para a condutividade térmica que deve ser corretamente ponderada, de modo a assegurar a continuidade característica do método dos volumes finitos. Pode-se avaliar esta condutividade térmica através da interpolação linear e também pela resistência equivalente. Estes dois métodos utilizam um fator de interpolação definido através da seguinte expressão:



onde é a distância entre os volumes de controle P e E, como pode ser observado na Figura 2. é a distância entre a interface e o volume de controle E.

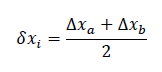
No método da interpolação linear, é feita uma interpolação linear entre os centros dos volumes de controle, assim a condutividade na interface pode ser determinada através da seguinte equação:



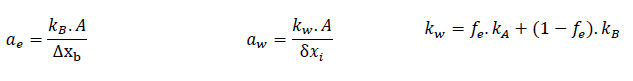
Deste modo, quando se aplica a equação da condução ao último volume de controle na parede A, à esquerda da interface com a parede composta pelo material B, só é necessário que os coeficientes e sejam devidamente ajustados. Deste modo:



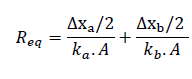
onde:



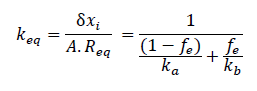
Do mesmo modo, quando a equação da condução é aplicada ao primeiro volume de controle na parede B, à direita da interface com a parede composta pelo material A, só é necessário que os coeficientes e sejam devidamente ajustados:



O segundo método para avaliação da condutividade térmica na interface é obtido a partir da resistência equivalente entre os volumes de controle que ficam entre a interface. A resistência equivalente pode ser calculada através da seguinte equação:



Logo, a condutividade térmica equivalente pode ser determinada, obtendo-se:



Assim, para último volume de controle na parede A, à esquerda da interface com a parede composta pelo material B, pode-se aplicar a equação da condução, utilizando os seguintes coeficientes e :

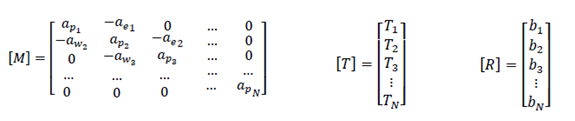


E para o primeiro volume de controle na parede B, à direita da interface com a parede composta pelo material A, pode-se aplicar a equação da condução, utilizando os seguintes coeficientes e e :



No problema proposto, não há geração interna de calor, deste modo o termo fonte médio é nulo. Outro fator em comum entre todos os coeficientes é a área A, que será considerada como tendo 1 m².

Logo, dividindo as paredes constituídas pelos materiais A e B, respectivamente em e pontos, é possível formar um sistema de N equações, sendo . Assim, obtemos:



Aplicando-se as propriedades fundamentais das matrizes, é possível obter o vetor [T]:

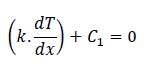


1. Solução analítica

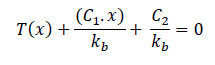
A solução analítica exata pode ser determinada também a partir da equação:



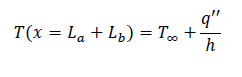
Integrando:

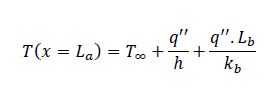


Como a parede é composta por dois materiais, primeiramente a equação será integrada no intervalo em que varia de 0 a La e depois de La até Lb. Nestes intervalos não há variação da condutividade térmica. Primeiramente é integrado a parte da parede que é composta pelo material B, assim:

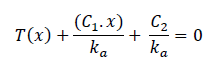


As condições de contorno nesta parede são:

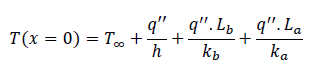
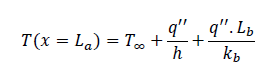




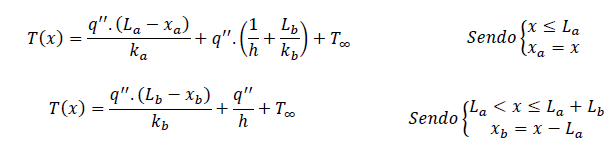
Para a parede que é composta pelo material A, a integração da equaçãoresulta em:



As condições de contorno nesta parede são:

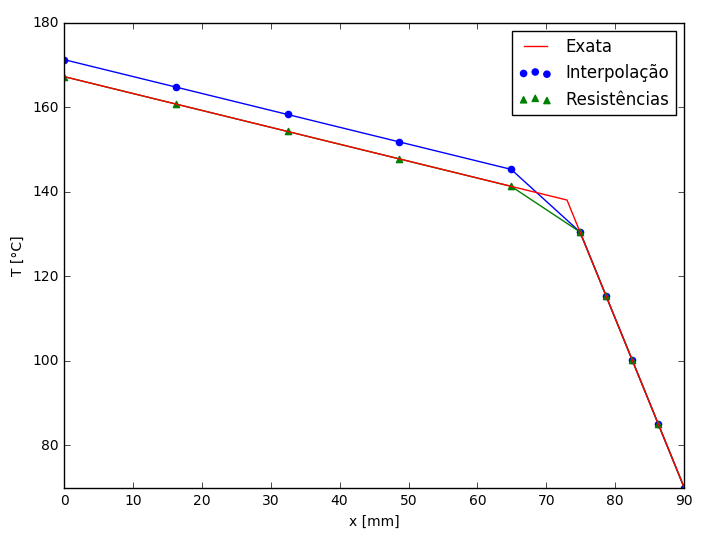


Assim, pode-se obter as equações que descrevem o perfil de temperatura ao longo da parede composta em função das condições estabelecidas pelo problema.

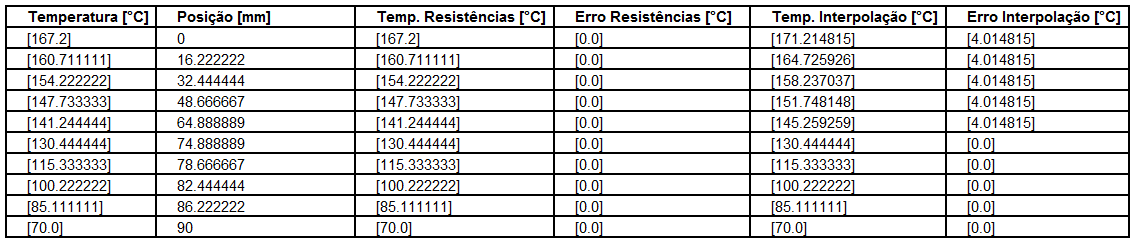


1. Resultados

As primeiras análises desenvolvidas para avaliar a condutividade térmica na interface entre as paredes foram realizadas utilizando um mesmo número de volumes de controle distribuídos tanto para a parede feita do material A, quanto para a parede feita do material B.

Deste modo, foi elaborado um algoritmo na linguagem de programação do software Python, que se encontra no apêndice, para determinação do perfil de temperatura obtido através das aproximações pelos métodos da interpolação linear e da resistência equivalente, além da solução analítica exata. Assim, foi feita uma análise para 10 volumes de controle ao longo desta parede composta, distribuindo 5 volumes de controle para as paredes de cada material. Os resultados obtidos podem ser visualizados na Figura 4, comparando os métodos da interpolação linear e da resistência equivalente com a solução analítica exata. 

**Figura 4 – Distribuição de temperaturas para 10 volumes**

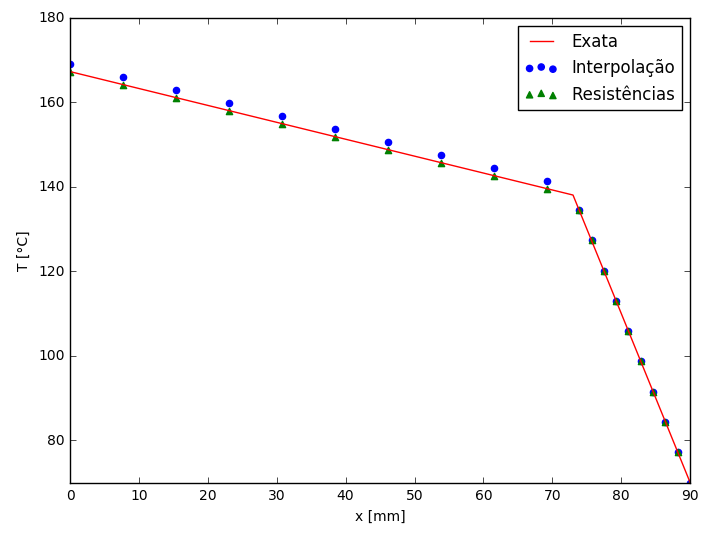


**Tabela 1 – Erro de cada método**

Da tabela acima e do gráfico fica claro que o método das resistências equivalentes é superior ao da interpolação linear. Mesmo com uma malha com poucos pontos como a utilizada tal método apresenta a solução exata, enquanto a interpolação linear apresenta um erro associado alto (4,01 ºC).

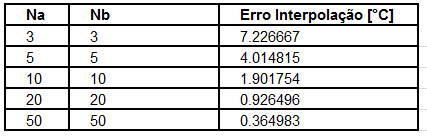
Na Figura 4 observa-se uma descontinuidade entre os volumes de controle, como se existisse uma inclinação intermediária na transição entre os materiais, este erro gráfico é promovido pelo próprio Python, visto que o mesmo conecta os pontos discretos através de retas.

Deste modo, a Figura 5 mostra a representação correta do perfil de temperatura pelos 2 métodos com um número total de volumes igual a 20.



**Figura 5 – Distribuição de temperaturas para 20 volumes**

Na figura 5 fica claro o erro associado ao método da interpolação linear diminui com o aumento da malha. Assim, a tabela 2 mostra o erro associado a diferentes tamanhos de malha. Como o erro do método das resistências é nulo, ele não foi representado.



**Tabela 2 – Erro Associado ao tamanho da malha**

1. Conclusão

Com o desenvolvimento deste trabalho, foi possível compreender melhor a transferência de calor por condução em objetos constituídos de diferentes materiais, de condutividades térmicas diferentes. Esta situação representa um problema real, como por exemplo as paredes construídas para casas em países em que o inverno é muito frio ou em aplicações em que se deseja possuir um isolamento no interior de uma parede, com o objetivo de diminuir a transferência de calor com o ambiente externo.

Foi utilizado o método dos volumes finitos com utilização de aproximação através de interpolação linear e resistência térmica equivalente para determinação da condutividade térmica na interface, e assim poder obter o perfil de temperatura ao longo da espessura da parede composta. Comparando os resultados obtidos com a solução analítica exata foi possível observar que a aproximação pelo método da resistência equivalente apresenta maior precisão e pode descrever o perfil de temperatura com maior confiabilidade. Já a aproximação por interpolação linear introduz um erro inerente a este tipo de aproximação. Desta forma este método introduz erros significativos para uma pequena quantidade de volumes de controle, e este método exigiria uma grande quantidade de volumes de controle para apresentar resultados próximos ao valor exato e mesmo assim poderia apresentar ainda um certo erro.

1. Apêndice

Algoritmo implementado em Python: